1. soutěžní série – řešení

1. Všimneme si, že $A_n = 4\frac{1}{9}(10^{2n} - 1)$ a $B_n = 8\frac{1}{9}(10^n - 1)$. Pak už lze počítat

$$A_n + 2B_n + 4 = \tfrac{4}{9}10^{2n} + \tfrac{16}{9}10^n + \tfrac{16}{9} = \left(\tfrac{2}{3}10^n + \tfrac{4}{3}\right)^2 = \left(6\tfrac{1}{9}(10^n - 1) + 2\right)^2.$$

Zkoumané číslo je druhou mocninou čísla tvořeného $n-1$ šestkami a jednou osmičkou.

2. Označíme $f_n(x) = 3x^2 - 2nx^3$. Pak $x_{n+1} = f_n(x_n)$. Funkce f_n má derivaci $6x - 6nx^2 = 6x(1-nx)$, takže na intervalu $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ funkce f_n roste. To znamená, že $0 = f_1(0) < f_1(x_1) < f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$. Takže $x_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Dále indukcí ukážeme, že $x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Pro $n = 1, 2$ to už máme. Pokud nyní $x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, pak z rostoucnosti f_n na $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ je $x_{n+1} \in \left(f_n(0), f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(0, \frac{1}{n^2}\right) \subset \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$. To znamená, že $0 < x_n < \frac{1}{n}$. což už implikuje, že x_n konverguje do nuly.

3. Protože $1 \leq d_i \leq 2021$, je $(d_i - 1)(2021 - d_i) \geq 0$, čili $\sum_i (d_i - 1)(2021 - d_i) \geq 0$. To znamená, že $\sum_i d_i^2 \leq \sum_i (2021 d_i - 2021 + d_i) = 2022 \sum d_i - 2021n$. Stačí si tedy uvědomit, že platí $\sum_i d_i = 2m$. To platí proto, že pokud sčítáme počty kamarádů každého dítěte, tak každé kamarádství započítáme přesně dvakrát - jednou pro každého z kamarádů.

4. Úlohu vyřešíme sporem. Nechť je hodnost matice (nejvýše) 1. Pak musí existovat racionální čísla $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ taková, že $A_{ij} = a_i b_j$. Bez újmy na obecnosti můžeme smazat nulové řádky a sloupce A. Každé nenulové racionální číslo lze napsat ve tvaru $q = \pm 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3} \ldots$ s celočíselnými exponenty $c(q) = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$. Číslo $|a_i b_j|$ je prvočíslem právě když $c(a_i) + c(b_j)$ má jednu jedničku a zbytek nuly. Každému z $n+m$ různých prvočísel musí odpovídat jeden lineárně nezávislý vektor v lineárním prostoru

$$\left\{ \sum_i x_i c(a_i) + \sum_j y_j c(b_j) \middle| x_i, y_j \in \mathbb{R}, \sum_i x_i = \sum_j y_j \right\},$$

který má dimenzi nejvýše $m + n - 1$, spor. Podmínka $\sum_i x_i = \sum_j y_j$ zde zmenšila dimenzi o 1 a nechala vektory $c(a_i) + c(b_j)$.