7. soutěžní série – řešení

1. Pro polynomy P stupně $n \geq 2$ máme v podmínce $P'(P(x)) = P(P'(x))$ polynomy stupňů $n(n-1)$. Porovnáním vedoucích koeficientů dostáváme $na_n^n = n^n a_n^{n+1}$, tedy $n^{1-n} = a_n$, což neplatí pro celé a_n. Hledáme polynomy tvaru $P(x) = a_1x + a_0$. Daná podmínka říká $a_1 = a_1^2 + a_0$. Všechny vyhovující polynomy jsou $P(x) = a_1x + a_1(1 - a_1)$, $a_1 \in \mathbb{Z}$.

2. Pokud $\sum \beta_n$ konverguje, jsou její členy od nějakého indexu menší než jedna. Pak je ale $\alpha_n < \beta_n$ a tedy také $\sum \alpha_n$ konverguje. Předpokládejme naopak, že $\sum \alpha_n$ konverguje. Pokud pro nějaké n platí $\beta_n > 2\alpha_n$, tj. $\beta_n > 2\beta_n^{\frac{n+1}{n}}$, pak $\beta_n < \frac{1}{2^n}$. Tedy pro každé n platí $\beta_n \leq \max\{2\alpha_n, \frac{1}{2^n}\} \leq 2\alpha_n + \frac{1}{2^n}$ a řada $\sum 2\alpha_n + \frac{1}{2^n}$ je absolutně konvergentní, tj. $\sum \beta_n$ konverguje.

3. Čísla x_{k-1}, $\frac{p_k}{x_{k-1}}$, $\left\{\frac{p_k}{x_{k-1}}\right\} = x_k$ jsou buď všechna racionální nebo všechna iracionální. Pro iracionální x_0 se posloupnost nemůže stát nulovou. Pokud $x_{k-1} = \frac{r_{k-1}}{s_{k-1}}$, $0 < r_{k-1} < s_{k-1}$, pak $x_k = \left\{\frac{p_k s_{k-1}}{r_{k-1}}\right\} = \frac{r_k}{s_k}$. Zde $s_k | r_{k-1}$, resp. $s_k = r_{k-1}$ pokud není třeba krátit zlomky, speciálně $0 < s_k \leq r_{k-1} < s_{k-1}$. To znamená, že jmenovatel bude ostře klesat do té doby, než se čitatel stane nulovým. Pro všechna racionální x_0 se posloupnost stane nulovou. Důkaz funguje pro libovolnou přirozenou posloupnost (p_k).

4. Nechť to neplatí, pak pro každou z barev máme vzdálenost d_a, d_b, $d_c > 0$, která nenastane. Zkonstruujme sedm bodů tak, aby z libovolných tří nějaké dva měly vzdálenost d. Tuto konstrukci proveďme pro vzdálenosti d_a, d_b, d_c a získáme A_i, B_i, C_i, $i = 1, \ldots, 7$. Sečtením souřadnic $A_i + B_j + C_k$ získáme 343 různých bodů (případně můžeme nějakou sedmici původních bodů otočit, abychom se vyhnuli kolizi). Dle Dirichletova principu má aspoň $\lceil \frac{343}{3} \rceil = 115$ bodů jednu barvu, řekněme a, od které jsme původně měli 49 sedmic odpovídajících vzdálenosti d_a: $A_i + B_j + C_k$, $i = 1, \ldots, 7$ pro každé pevné $j, k \in \{1, \ldots, 7\}$. Podruhé použijeme Dirichletův princip, $\lceil \frac{115}{49} \rceil = 3$, a najdeme sedmici, ve které tři body mají barvu a. Nějaké dva z nich tedy musí mít vzdálenost d_a, spor. Konstrukce: rovnostranné trojúhelníky ABC, BDC, AEF, EGF o straně d takové, že $|DG| = d$.