5. soutěžní série – řešení

1. 2^{n-1}. Ukážeme, že $f(n) = n$ nebo $f(n) = 1$. Odtud snadno vyplyne, že se každý předcházející prvek musí zobrazit na největší nebo nejmenší číslo, co zatím nebylo. Tím dostaneme 2^{n-1} různých vyhovujích permutací a budeme vědět, že žádná jiná nevyhovuje. Nechť tedy pro spor $f(n) = m$, $1 < m < n$. Pak nám zůstanou neprázdné množiny $A = \{1, \ldots, m-1\}$ a $B = \{m+1, \ldots, n\}$ a rozdíl prvků mezi nimi je aspoň 2. Sledujme posloupnost $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. Pokud $f(1) \in A$, pak prvnímu prvku z B budou předcházet jen prvky A, spor. Obdobně pro $f(1) \in B$.

2. Pokud za x i za y dosadíme nulu, dostaneme $f(0)^2 = 2f(0)$, takže je buď $f(0) = 0$, nebo $f(0) = 2$. Pokud položíme $y = -x$, pak dostaneme $f(0)^2 = 2f(x^2)$. Tedy pro libovolné $x, y \in \mathbb{Z}$ je $f(x^2) = \frac{f(0)^2}{2} = f(y^2)$, čili $f(x^2) + f(y^2) = f(0)^2$. Z toho dostáváme $f(x+y)^2 = f(0)^2$ pro každé $x, y \in \mathbb{Z}$. Pak volbou $y = 0$ dostaneme rovnost $f(x)^2 = f(0)^2$ pro každé $x \in Z$. Takže, pokud $f(0) = 0$, pak $f(x) = 0$ pro každé x. Pokud naopak $f(0) = 2$, tak máme $f(x) = \pm 2$ pro každé x. Zároveň díky $f(0)^2 = 2f(x^2)$ je $f(x^2) = 2$. Tyto podmínky už ale postačují, protože jednoduše vidíme, že pokud S je nějaká podmnožina $\mathbb{Z}$ obsahující všechny čtverce a pokud $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in S \\ -2 & \text{pro } x \notin S \end{cases}$, pak f vyhovuje. Tedy vyhovuje konstantní nulová funkce (zjevně) a také libovolná funkce, která je v každém bodě ± 2, přičemž na druhých mocninách je rovna 2.

3. Vidíme, že $z^9 = \frac{11-10iz}{11z+10i}$. Protože $|11 - 10iz|^2 = 121 + 100|z|^2 + 220\Im z$ a $|11z + 10i|^2 = 121|z|^2 + 100 + 220\Im z$, tj. $|z|^9 = \frac{N}{D}$, kde $N - D = 21(1 - |z|^2)$. Pokud je tedy $|z| > 1$, pak $N < D$, tj. $|z|^9 < 1$, spor. A pokud $|z| < 1$, tak $N > D$, tj. $|z|^9 > 1$, spor.

4. Ano, Q vždy existuje. Vlastnost $P^2 = P$ znamená, že vlastní čísla matice mohou být jen nuly a jedničky a matice má plnou geometrickou hodnost (ke všem vlastním číslům existují vlastní vektory). $P \neq O_n, I_n$ říká, že vlastní čísla nejsou pouze nuly nebo pouze jedničky. Uvědomíme si, že Q se stejnými vlastními čísly včetně násobností, stejným vlastním prostorem jedničky, ale jiným vlastním prostorem nuly vyhovuje. Dívejme se na matice jako na zobrazení vektorů a násobení maticí zleva jako skládání zobrazení. Obě matice po první aplikaci zobrazí vektory do prostoru $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(Q)$ a další zobrazení už tyto vektory nemění, proto $Q = PQ = QPQ$. Na druhou stranu $\mathrm{Ker}(P) \neq \mathrm{Ker}(Q)$ a $\dim(\mathrm{Ker(P)}) = \dim(\mathrm{Ker(Q)})$, takže pro $v \in \mathrm{Ker}(P) \setminus \mathrm{Ker}(Q)$ platí $Pv = QPv = 0$, ale $Qv = PQv \neq 0$.