4. soutěžní série – řešení

1. Platí $(x^5y^6z^3)^2 = (xy)^7(x^3y^5z^6)$. Protože $x^3y^5z^6$ je sedmá mocnina a $(xy)^7$ je sedmá mocnina, je i $(x^5y^6z^3)^2$ sedmá mocnina, tedy i $x^5y^6z^3$ je sedmá mocnina.

2. Některá z množin musí obsahovat dva z vrcholů čtverce (BÚNO $A_1 = (0,0)$ a $B_1 = (0,1)$). Tato množina kvůli průměru menšímu než $r = \sqrt{65}/8$ nebude obsahovat body $A_2 = (\frac{1}{8}, 0)$ a $B_2 = (\frac{1}{8}, 1)$, které mají vzdálenost r od $C = (1, \frac{1}{2})$. Nějaká ze zbývajících dvou množin opět musí obsahovat dva z bodů A_2, B_2, C, tedy A_2 a B_2, a proto nebude obsahovat body $A_3 = (\frac{1}{4}, 0)$ a $B_3 = (\frac{1}{4}, 1)$. Ty mají vzdálenost $\frac{5}{4} > r$ od bodů $(1,1)$ a $(1,0)$ tedy nemohou být všechny obsažené ve zbývající třetí množině.

3. Dokazujme sporem. Předpokládejme pro spor, že pro každý bod x existují přirozená čísla $m = m(x)$, $n = n(x)$, že v obdélníku $(x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}) \times (f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n})$ neleží žádný bod grafu f. Protože dvojic (m,n) je pouze spočetně mnoho, existuje dvojice (m,n), která se rovná $(m(x), n(x))$ pro nespočetně mnoho bodů x. V některém z intervalů $(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$, $k \in \mathbb{Z}$ leží nespočetně mnoho z těchto bodů x. Protože žádný z těchto bodů neleží v obdélníku obklopujícím jiný z těchto bodů, musí se jejich funkční hodnoty lišit aspoň o $\frac{1}{n}$, což je spor.

4. Platí $gh^2 = ghg^3h = (ghg)g^2h = (hg^2h)g^2h = (hg^2)(hg^2h) = hg^2(ghg) = hg^3hg = h^2g$. Takže $gh^2 = h^2g$, z čehož jednoduchou indukcí dostaneme $gh^{2k} = h^{2k}g$ pro libovolné přirozené k. Protože n je liché, platí i $gh^{n+1} = h^{n+1}g$. To nám díky $h^n = e$ dává $gh = hg$. Tedy $g^2h = ghg = hg^2h = ghgh = g^2h^2$. Takže vynásobením $(g^2h)^{-1}$ zleva dostaneme $e = h$, což jsme chtěli.