2. soutěžní série

19. 10. 2020

Úloha 1. Nechť n je přirozené číslo. Mějme n identických svíček. První den jednu z nich na hodinu zapálíme. Druhý den dvě z nich na hodinu zapálíme. Tak to pokračuje až do n-tého dne, kdy zapálíme všech n z nich. Pro která n umíme (při správné délce svíček) svíčky zapalovat takovým způsobem, aby na konci n-tého dne byly všechny vyhořelé?

(5 bodů)

Úloha 2. Dokažte: Jestliže S je podmnožina reálných čísel taková, že každá spojitá funkce z S do S má pevný bod, pak S je buď uzavřený omezený interval nebo jednobodová. (10 bodů)

Úloha 3. Přímky t_A a t_B se dotýkají paraboly $y = x^2$ v bodech A a B. Označme jejich průsečík jako C. Nechť m je délka těžnice z C v trojúhelníku ABC. Vyjádřete obsah trojúhelníku ABC v závislosti na m. (10 bodů)

Úloha 4. Je-li G silně souvislý orientovaný graf, označme $s(G)$ délku nejkratšího uzavřeného sledu procházejícího všemi vrcholy. Jaké největší hodnoty může $s(G)$ nabývat, je-li G graf na n vrcholech?

Orientovaný graf je silně souvislý, jestliže z libovolného vrcholu existuje cesta do libovolného jiného. Sled je posloupnost hran, které na sebe navazují. Na rozdíl od „cesty“ se ve sledu vrcholy i hrany mohou opakovat. (15 bodů)