

2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 26. 10. 2020.

Úloha 1. Buď n přirozené číslo. Ukažte, že existuje polynom p s reálnými koeficienty splňující $p(x - \frac{1}{x}) = x^n - \frac{1}{x^n}$, právě když n je liché.

Úloha 2. Na tabuli je 9999-krát napsáno číslo 1. Pokud jsou na tabuli napsána čísla x , x , y a y , můžeme je smazat a místo nich napsat $x + y$ a $x - y$. Navíc pokud je na tabuli napsána nula, pak ji můžeme smazat. Můžeme provést takovou posloupnost operací, že na tabuli zbudou nanejvýš tři čísla?

Úloha 3. A je množina reálných 5×7 matic, která je uzavřená na sčítání a násobení skalárem a obsahuje matice hodnotí 0, 1, 2, 4 a 5. Musí A nutně obsahovat i matice hodnotí 3?

Úloha 4. Pro přirozené číslo n označme $t(n)$ součet dělitelů d čísla n , které jsou menší než n a n/d není dělitelné druhou mocninou přirozeného čísla. Existuje n , pro něž je posloupnost n , $t(n)$, $t(t(n))$, ... neomezená?

Úloha 5. Nelezněte všechny diferencovatelné funkce $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ takové, že $f(0) = 0$ a pro každé $x \in [0, \infty)$ je $f'(x^2) = f(x)$.

★ **Úloha 6.** Existuje funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že z $f(x, y) = f(y, z)$ plyne $x = y = z$?