

# 1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 12. 10. 2020.

**Úloha 1.** Kolik nejvýše hran může mít graf s  $2n$  vrcholy bez žádného 3-cyklu?

**Úloha 2.** Najděte všechny spojité funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $f(r) = f(x)f(y)$  pro všechna  $x, y, r$ , kde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Úloha 3.** Nechť  $a_0 \in \mathbb{Q}$  a  $a_n = a_0 + 3^n - 1$  pro všechna nezáporná celá  $n$ . Nalezněte všechna  $a_0$  taková, že kdykoliv  $0 < j < k$  jsou celá čísla, pak  $\frac{a_k^j}{a_j^k}$  je celé číslo.

**Úloha 4.** Nechť  $A, B, C$  jsou reálné  $n \times n$  matice splňující  $A^3 = -I$ ,  $BA^2 + BA = C^6 + C + I$  a  $C$  je symetrická. Ukažte, že  $n$  je sudé.

**Úloha 5.** Nechť  $\mathcal{C}$  je množina všech integrovatelných funkcí  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  takových, že  $f(x) \leq x$  pro všechna  $x \in [0, 1]$ . Nechť

$$V(f) = \int_0^1 f^2(x) \, dx - \left( \int_0^1 f(x) \, dx \right)^2$$

pro  $f \in \mathcal{C}$ . Určete  $V(\mathcal{C})$ .

★ **Úloha 6.** K dané parabole najděte ohnisko pomocí kružítka a pravítka.