6. soutěžní série

18. 12. 2019

Úloha 1. Dokažte, že každé kladné racionální číslo lze napsat jako součin faktoriálů (ne nutně různých) prvočísel dělený součinem faktoriálů (ne nutně různých) prvočísel, tj.

$$\frac{(p_1)!\dots(p_k)!}{(q_1)!\dots(q_j)!}.$$

(5 bodů)

Úloha 2. Nechť $P(x,y) = (x^2y^3, x^3y^5)$. Označme jako $P_1 = P$ a jako $P_{n+1} = P \circ P_n$. Pokud $f(n)$ je exponent u x v první složce $P_n(x,x)$, určete

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)}.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Vypočtěte

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Na vánočním řešiteláku se sešlo n studentů a Ondra přinesl zpěvník s koledami. Ukázalo se, že každou koledu umí alespoň dva studenti a platí, že kdykoli nějací dva studenti umí nějaké dvě koledy (oba obě), pak každou z těchto dvou koled umí jiný počet studentů. Ukažte, že ve zpěvníku je nanejvýš $(n-1)^2$ koled. (15 bodů)