6. soutěžní série – řešení

1. Dokážeme indukcí podle největšího prvočísla p, které dělí čitatel či jmenovatel našeho racionálního čísla $\frac{a}{b}$. Je-li $p = 2$, pak je $\frac{a}{b} = (2^k)^{\pm 1}$ a stačí vzít $p_1 = \cdots = p_k = 2$ nebo $q_1 = \cdots = q_k = 2$. Indukční krok: Nechť p je největší prvočíslo, které dělí čitatele či jmenovatele a nechť BÚNO dělí čitatele a $\nu_p(a) = n$. Pak vezmeme $p_1 = \cdots = p_n = p$ a číslo

$$\frac{a}{b(p!)^n}$$

už lze zapsat dle indukčního předpokladu.

2. Exponenty x v jednotlivých složkách zapíšeme do vektoru, začínáme s $v_0 = \binom{1}{1}$. Z předpisu P plyne, že $v_{n+1} = Av_n$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ a zkoumanou funkcí je první složka vektoru $f(n) = (v_n)^1$. Vlastní čísla A jsou $\lambda_\pm = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ a v_0 není vlastním vektorem λ_-. Odtud vychází, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_+\lambda_+^n + c_-\lambda_-^n} = \lambda_+ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_+ + c_- \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n} = \lambda_+.$$

3. Trik, který je dobré umět: po úpravě máme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2},$$

což je přesně suma z definice Riemannova integrálu $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$, takže výsledek je $\frac{\pi}{4}$.

4. Počítejme koledy, které umí právě k studentů. Každou z nich umí $\binom{k}{2}$ dvojic studentů, přičemž celkový počet dvojic studentů je $\binom{n}{2}$ a žádná dvojice nesmí umět dvě různé počítané koledy. Proto jich může být nejvýše $\left\lfloor \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \right\rfloor$. Celkový počet koled je proto nejvýše

$$\sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \right\rfloor \leq n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = n(n-1) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-1)^2.$$