5. soutěžní série – řešení

1. Hledanou pravděpodobnost označme P_n. Posloupnost P_n jistě splňuje rekurenci $P_n = P_{n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}(1-P_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n+1}P_{n-1}+\frac{1}{2n+1}$ a $P_1 = \frac{1}{3}$. Z rekurence vypočítáme $P_2 = \frac{2}{5}$, $P_3 = \frac{3}{7}$. Z výpočtu usoudíme, že $P_n = \frac{n}{2n+1}$, což snadno dokážeme indukcí.

2. Snadno najdeme řešení $(2,3)$, $(3,6)$, $(4,10)$. Pro $n = 5$ je LS větší než $10!$ a pro $m \geq 11$ je PS dělitelná 11, spor. Podobně pro $n = 6$ je LS větší než $12!$ a pro $m \geq 13$ je PS dělitelná 13, spor. Pro $n \geq 7$ je LS větší než $(4n-4)!$ (dk indukcí) a Bertrandův postulát říká, že striktně mezi $2n-1$ a $4n-2$ je prvočíslo, což dává spor pro větší pravé strany.

3. Každé lineární zobrazení z M_n do M_n je jednoznačně určeno pomocí n^4 koeficientů φ_{ijkl}, $1 \leq i,j,k,l \leq n$ předpisem $\varphi((a_{ij})_{i,j=1}^n) = (\sum_{i,j=1}^n \varphi_{ijkl}a_{ij})_{k,l=1}^n$. Podmínka $\varphi(A) = (\varphi(A^T))^T$ říká, že $\varphi_{ijkl} = \varphi_{jilk}$. Proto je φ jednoznačně určeno, pokud koeficienty volíme libovolně pro $i < j$ a všechna k,l, a pro $i = j$ a $k \leq l$. Prostor všech φ má dimenzi $\frac{n(n-1)}{2}n^2 + n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$.

4. Označme $g(y) = \left(\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^y f^3(x)\,\mathrm{d}x$. Platí $g(0) = 0$, a $g(1) \geq 0$ vyplyne z $g'(y) \geq 0$. Speciálně pokud někde $g'(y) > 0$, pak také dostaneme $g(1) > 0$. Máme $g'(y) = 2f(y)\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x - f^3(y)$ a víme, že $f(y) \geq 0$, takže nám stačí $h(y) = 2\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x - f^2(y) \geq 0$. Opět máme $h(0) = 0$, druhým zderivováním dostáváme $h'(y) = 2f(y)(1 - f'(y)) \geq 0$ zásluhou $f(y) \geq 0$ a $f'(y) \leq 1$ a dokazovaná nerovnost platí. Jelikož $f(y) > 0$ pro $y \in (0,1]$, rovnost nastane pouze v případě $f'(y) = 1$, tj. $f(x) = x$.