5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 11. 12. 2019.

Úloha 1. Kladné celé číslo n nazveme *pěkné*, pokud má tři různé kladné dělitele d_1, d_2, d_3, různé od n, pro které platí $d_1 + d_2 + d_3 > n$. Najděte největší kladné celé k, že $k \mid n$ pro každé pěkné n.

Úloha 2. Dokažte, že reálná posloupnost (a_n) splňující rekurentní formuli $a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1}$, $n \geq 2$ je periodická s periodou 9.

Úloha 3. Nechť x, y jsou nenulová reálná čísla taková, že $x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3$. Jakých hodnot může nabývat $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Úloha 4. Nechť $p_M(n)$ pro množinu M značí počet dvojic $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$ splňujících $m_1 + m_2 = n$. Je možné rozdělit $\mathbb{N}_0$ na disjunktní množiny A a B tak, aby platilo $p_A(n) = p_B(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$?

Úloha 5. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^+$ a nechť pro všechna $t > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(tn) = 0$. Plyne odtud, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

⋆ **Úloha 6.** Rozhodněte, zda lze ke každé grupě G nejvýše mohutnosti kontinua zkonstruovat metrický prostor tak, že G je grupa všech jeho izometrií.