

4. soutěžní série

20. 11. 2019

Úloha 1. Dá se tabulka 3×3 vyplnit devíti za sebou jdoucími kladnými čísly tak, že součet každých dvou sousedící hranou je prvočíslo?

(10 bodů)

Úloha 2. Nechť $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která pro každé n splňuje

$$\int_0^n f(x)f(n-x) \, dx = \int_0^n f^2(x) \, dx.$$

Ukažte, že f je periodická.

(10 bodů)

Úloha 3. Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která existuje celočíselný polynom $p_n(a, b, c)$ splňující $p_n(x^n, x^{n+1}, x + x^{n+2}) \equiv x$.

(10 bodů)

Úloha 4. Na kružnici s průměrem 1 je nakresleno několik tětiv. Součet délek těchto tětiv je alespoň 19. Ukažte, že existuje průměr kružnice, který protíná alespoň 13 z těchto tětiv.

(10 bodů)