4. soutěžní série – řešení

1. Ne. Součet různých kladných čísel je alespoň 3, tedy sousedící čísla musí mít opačnou paritu. Nechť pro jednoduchost rozmisťujeme 4 sudá a 5 lichých čísel. Pak prostřední číslo nutně bude liché a jeho sousedé budou 4 po sobě jdoucí sudá čísla. Pak ale jejich součty přes hrany budou čtyři po sobě jdoucí lichá čísla. Alespoň jedno z nich bude dělitelné třemi. Speciálně pro čísla $3, 5, 7, 9$ devítka není prvočíslem. Pro opačnou paritu je důkaz stejný.

2. Platí

$$\int_0^n f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{1}{2}\left(f^2(x) + f^2(n-x)\right)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^n f(x)f(n-x)\,\mathrm{d}x,$$

kde rovnost nastane právě, když $(f(x) - f(n-x))^2 = 0$ s.v. na $[0, n]$. Ze spojitosti f plyne, že rovnost platí všude. Pro každé $x \in [0, \infty)$ máme $f(x) = f((N-1)-x) = f(N-(x+1)) = f(x+1)$ pro $N = \lceil x+1 \rceil$.

3. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyhovuje polynom $p_n = c\left(\sum_{i=0}^{n-2}(-b)^i\right) + (-1)^{n-1}a^n$, neboť

$$x = (x + x^{n+2})(1 - x^{n+1} + x^{2(n+1)} - \ldots + (-1)^{n-2}(x^{n+1})^{n-2}) + (-1)^{n-1}(x^n)^n.$$

4. Ke každé tětivě přiřaďme kratší oblouk, který jí přísluší, a oblouk, který je s ním středově symetrický podle středu kružnice. Protože délka oblouku vymezeného tětivou je určitě větší, než součet délek tětiv, platí, že součet délek vyznačených oblouků je alespoň $2 \cdot 19 = 38 > 12\pi$. Protože obvod kružnice je π, musí nějaký bod ležet uvnitř alespoň 13 z vyznačených oblouků. Potom když nakreslíme průměr skrz tento bod, protíná z definice vyznačených oblouků všechny tětivy, v jejichž obloucích leží. Tedy musí protínat alespoň 13 tětiv.