3. soutěžní série

6. 11. 2019

Úloha 1. Pro dané přirozené číslo n najděte nejmenší k s následující vlastností: Máme-li v n-rozměrném prostoru k bodů s celočíselnými souřadnicemi, pak střed některé úsečky spojující dva z nich má také celočíselné souřadnice. (5 bodů)

Úloha 2. a) Ukažte, že existuje diferencovatelná funkce $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ taková, že pro každé kladné x platí $f(f'(x)) = x$.

b) Ukažte, že neexistuje diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé reálné x platí $f(f'(x)) = x$. (10 bodů)

Úloha 3. Je-li p liché prvočíslo, ukažte, že výraz

$$1! + 2! + 3! + \cdots + p! - \left\lfloor \frac{(p-1)!}{e} \right\rfloor$$

je dělitelný p. (10 bodů)

Úloha 4. Řekneme, že komplexní $n \times n$ matice A je *vysmátá*, jestliže má na $n^2 - n$ místech nuly a na zbývajících n místech nějaká navzájem různá nenulová komplexní čísla $r_1, \ldots, r_n$, která jsou zároveň vlastními čísly matice A. Pro jaká n existuje vysmátá $n \times n$ matice s nulovou hlavní diagonálou? (Komplexní číslo λ nazýváme *vlastním číslem* matice A, jestliže $\det(\lambda I - A) = 0$.) (15 bodů)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`