3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 13. 11. 2019.

Úloha 1. Pro která n existuje n různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, takových, že pro každé i mezi 1 a n je a_i^{2019} dělitelné součinem všech a_j, kde $j \neq i$?

Úloha 2. Je možné pokrýt tři sousední stěny krychle s délkou hrany 4 pomocí šestnácti nálepek o rozměru 1×3? Nálepky je možné ohýbat přes hranu krychle a jejich strany musí být umístěné rovnoběžně s hranami krychle.

Úloha 3. Některé podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazveme *velké*, přičemž každá nadmnožina velké množiny je také velká. Ukažte, že průměrná velikost velkých množin je aspoň $\frac{n}{2}$.

Úloha 4. Nechť $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou prvočísla a $p_k < 2^{100}$. Ukažte, že

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} < 10.$$

Úloha 5. Nechť G je konečná grupa, $|G| > 1$. Řekneme, že prvek $x \in G$ je *self-double*, pokud existují ne nutně různé $u, v \neq e$ takové, že $x = uv = vu$. Nechť $x \in G$ není self-double. Ukažte, že pak x má řád 2 a $|G| = 2(2k - 1)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

$\star$ **Úloha 6.** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je spojitá funkce taková, že $f(x+1) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že pro každé reálné t existuje x takové, že vektor spojující $f(x)$ a $f(x + \frac{1}{2})$ je kolmý na vektor spojující $f(x + t)$ a $f(x - t)$. (A nebo je alespoň jeden z nich nulový.)