

2. soutěžní série

23. 10. 2019

Úloha 1. Bud' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, jejíž druhá derivace je nezáporná. Ukažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x + f'(x)) \geq f(x).$$

(5 bodů)

Úloha 2. Každý bod v rovině je obarven jednou ze dvou barev. Ukažte, že existuje konvexní pětiúhelník se třemi pravými úhly, jehož všechny vrcholy mají stejnou barvu. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť n je přirozené číslo a A a B jsou komplexní matice $n \times n$ takové, že $(AB)^3$ je nulová matice. Pro která n toto implikuje, že $(BA)^3$ je nulová matice? (10 bodů)

Úloha 4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n splňující

$$m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1)$$

(15 bodů)