1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 16. 10. 2019.

Úloha 1. Nechť a, b, c jsou tři reálná čísla, ne všechna stejná. Ukažte, že platí $a+b+c=0$ právě tehdy, když $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$

Úloha 2. Rado si myslí číslo $x \leq 100$. Ondra mu může pokládat pouze jeden typ otázek, a to „Jaký je největší společný dělitel čísel $x+m$ a n?“, kde přirozená čísla m, $n \leq 100$ si pokaždé zvolí. Bude Ondrovi stačit 7 otázek, aby správně určil x (pokud Rado bude pravdivě odpovídat)?

Úloha 3. Pro přirozené číslo $n \geq 2$ označme D_n determinant $(n-1)\times(n-1)$ matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je posloupnost $\left(\frac{D_n}{n!}\right)_{n=2}^{\infty}$ omezená.

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ splňující

$$f(f(x)) = 6x - f(x)$$

pro všechna $x > 0$.

Úloha 5. Rovinu obarvíme dvěma barvami. Ukažte, že existuje rovnostranný trojúhelník s vrcholy stejné barvy. Najděte obarvení, pro které neexistuje rovnostranný trojúhelník s délkou strany 1 a vrcholy stejné barvy.

⋆ **Úloha 6.** Rozhodněte, zdali existuje $c < 1$ takové, že kdykoliv je M mnohoúhelník v rovině s obsahem 1, pak se dá posunout o vzdálenost přesně $\frac{1}{100}$ na mnohoúhelník N tak, že obsah průniku M a N je nanejvýš c.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`