6. soutěžní série - Vánoční

19. 12. 2018

Úloha 1. I na reálné ose se naděluje. Ježíšek při rozdávání skáče po bodech množiny $\{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}:\ m, n \in \mathbb{N}\}$. Dostane se libovolně blízko k $\sqrt{2}$, aby ji mohl také obdarovat? (5 bodů)

Úloha 2. Ve Čtvercové Lhotě žije 1000 dětí. K Vánocům dostane n-té nejmladší dítě tolik dárků, kolik je čtverců přirozených čísel v intervalu $[n-250, n+250]$. Kolik dětí dostane přesně 15 dárků? (10 bodů)

Úloha 3. Štít Santova domu má tvar trojúhelníku se stranami 1, 1, $\sqrt{2}$. Na jeho obvod nainstaloval Santa vánoční osvětlení, v každém bodě svítí žárovička jedné ze čtyř barev. Ukažte, že existují dva body vzdálené aspoň $2-\sqrt{2}$, které svítí stejnou barvou. (10 bodů)

Úloha 4. (seriál) Když byl Děda Mráz už unavený vánočním shonem, odpočinul si u následující úlohy. Nechť $m > n$ a $A_1, \ldots, A_m$ jsou podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$. Dokažte, že

a) existují dvě disjunktní množiny indexů I_1, I_2, alespoň jedna neprázdná, splňující
$$\bigcup_{i\in I_1} A_i = \bigcup_{i\in I_2} A_i,$$
(7 bodů)

b) pokud navíc $m > n+1$, pak platí předchozí tvrzení s přidanou podmínkou
$$\bigcap_{i\in I_1} A_i = \bigcap_{i\in I_2} A_i.$$
(8 bodů)