6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 9. 1. 2019.

Úloha 1. Buď $s \subset \mathbb{R}^2$ oblouk kružnice o poloměru 1 se středem v počátku, který leží celý v prvním kvadrantu. Označme A obsah plochy pod obloukem s a nad osou x a označme B obsah plochy nalevo od s a napravo od osy y. Ukažte, že $A + B$ závisí jen na délce s, nikoli na jeho poloze.

Úloha 2. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $0 < x_n < 1$ a $x_{n+1}(1 - x_n) \geq \frac{1}{4}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Úloha 3. (seriál) Nechť $P(x)$ je nenulový reálný polynom. Dokažte, že existuje nenulový polynom $Q(x)$ takový, že polynom $R(x) = P(x)Q(x)$ má nenulové koeficienty pouze u členů s prvočíselnými exponenty.

Úloha 4. Nechť S je konečná množina ne nutně různých celých čísel. Pokud libovolné číslo odebereme, lze zbylá rozdělit do dvou množin stejné velikosti se stejným součtem. Ukažte, že všechna čísla byla stejná.

Úloha 5. Uvažme neprotínající se uzavřenou spojitou křivku v rovině, jejíž kolmý průmět na každou přímku je dlouhý d. Rozhodněte, zda tato křivka

a) musí být kružnice,

b) musí mít délku πd.

$\star$ **Úloha 6.** Pro přirozené číslo k označme

$$n_k = 101k - 100 \cdot 2^k.$$

Ukažte, že pro libovolnou čtveřici přirozených čísel a, b, c, d menších než 100 platí: Pokud $n_a + n_b = n_c + n_d \mod 10100$, pak $\{a, c\} = \{b, d\}$.