4. soutěžní série

21. 11. 2018

Úloha 1. Buď $f : [a,b] \to [a,b]$ spojitá funkce, diferencovatelná na (a,b) a splňující $f(a) = a$, $f(b) = b$. Ukažte, že existují c_1, $c_2 \in (a,b)$, $c_1 \neq c_2$ taková, že platí

$$f'(c_1)f'(c_2) = 1.$$

(10 bodů)

Úloha 2. (seriál) Ve městě žije n lidí a existuje m filmových klubů $F_1, \dots, F_m$ a m divadelních klubů $D_1, \dots, D_m$ takových, že $|F_i \bigcap D_j|$ je sudé číslo právě když $i \neq j$. Dokažte, že $m \leq n$. (10 bodů)

Úloha 3. Kolik existuje permutací π na $\{1, \dots, n\}$ takových, že pro každé $i = 2, 3, \dots, n$ existuje $j < i$, pro které $|\pi(i) - \pi(j)| = 1$?

(10 bodů)

Úloha 4. Nechť A je vrchol pravidelného n-úhelníku vepsaného do jednotkové kružnice a nechť a_1, $\dots$, a_{n-1} jsou vzdálenosti ostatních vrcholů n-úhelníku od vrcholu A. Ukažte, že

$$(5 - a_1^2)(5 - a_2^2) \cdots (5 - a_{n-1}^2) = F_n^2,$$

kde F_n je n-té Fibonacciho číslo ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$).

(15 bodů)