

### 3. soutěžní série

7. 11. 2018

**Úloha 1.** V trojúhelníku  $ABC$  standardně označeném platí pro nějaké  $p > 1$

$$\begin{aligned}a^p \cos \beta + b^p \cos \alpha &= c^p, \\ a^{2p-1} \cos \beta + b^{2p-1} \cos \alpha &= c^{2p-1}.\end{aligned}$$

Dokažte, že  $ABC$  je rovnoramenný. (10 bodů)

**Úloha 2. (seriál)** Ve městě žije  $L$  lidí a existuje tam  $K$  klubů. Víme, že každý klub má lichý počet členů a každé dva různé kluby mají sudý počet společných členů. Dokažte, že  $K \leq L$ . (10 bodů)

**Úloha 3.** Porovnejte hodnoty integrálů

$$\int_0^1 x^x dx \quad \text{a} \quad \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} dx dy.$$

(10 bodů)

**Úloha 4.** Buď  $S$  konečná množina přirozených čísel větších než jedna, a to taková, že pro každé přirozené  $n$  existuje  $s \in S$ , pro něž  $NSD(n, s) = 1$  nebo  $NSD(n, s) = s$ . Dokažte, že existují  $t, s \in S$ , že  $NSD(t, s)$  je prvočíslo. (15 bodů)