3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 14. 11. 2018.

Úloha 1. Buď $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ polynom s celočíselnými koeficienty a nechť a_0, a_n a $P(1)$ jsou lichá čísla. Pak P nemá žádný racionální kořen. Dokažte.

Úloha 2. Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují

$$(a^2 + ab + b^2) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

pro všechna a, $b \in \mathbb{R}$.

Úloha 3. Hráč si hází spravedlivou mincí a podle dosavadních výsledků hodů rozhodne, zda: přestane házet a vyhrál, nebo přestane házet a prohrál, nebo hází dále. Rozhodněte, pro která $p \in (0, 1)$ existují pravidla, pro která s pravděpodopností p vyhraje a s pravděpodobností 1 skončí po konečně mnoha hodech.

Úloha 4. Téčkem nazveme dvojici úseček AB a CD v rovině takových, že svislá AB vychází z x-ové osy směrem do horní poloroviny a B je vnitřním bodem vodorovné úsečky CD. Rozhodněte, zda je možné postavit téčka na všechny body x-ové osy tak, aby se žádné téčko na racionálním bodě neprotlo s téčkem na iracionálním bodě.

Úloha 5. Nechť $A_1, \dots, A_{n-1}$ jsou po dvou různé podmnožiny množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Dokažte, že pro nějaké $1 \leq k \leq n$ jsou množiny $A_i \setminus \{k\}$ také po dvou různé.

⋆ **Úloha 6.** Označme $\mathcal{A}$ množinu všech posloupností kladných reálných čísel. Najděte

$$\min_{(a_n) \in \mathcal{A}} \left\{ \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \right)^n \right\}.$$

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`