2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 31. 10. 2018.

Úloha 1. V rovině leží konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a mimo rovinu je dán bod X. Najděte body E, F, G, H na úsečkách AX, BX, CX, DX tvořící rovnoběžník.

Úloha 2. (seriál) Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_9$, $b_1, b_2, \ldots, b_9$ jsou ne nutně různá čísla z množiny $\{1, \ldots, 20\}$ taková, že $a_i \geq b_i$ pro $i \leq 9$. Dokažte, že potom existují celá čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_9$ ne všechna nulová taková, že

$$\binom{a_1}{b_1}^{\alpha_1} \binom{a_2}{b_2}^{\alpha_2} \cdots \binom{a_9}{b_9}^{\alpha_9} = 1.$$

Úloha 3. Nechť má spojitá funkce $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ nulový integrál přes každou čtvercovou množinu S, jejíž hrany jsou rovnoběžné s osami souřadnic a některá z jejích hran je součástí hrany čtverce $[0,1]^2$. Plyne odtud, že f je nulová funkce?

Úloha 4. Nechť reálné čtvercové matice A, B splňují $AB^2 = A - B$. Ukažte, že $I + B$ je invertibilní a že $AB = BA$.

Úloha 5. Přirozená čísla $a \geq 2$, $b \geq 2$ spňují $a^n - n \mid b^n - n$ pro všechna přirozená n. Dokažte, že $a = b$.

$\star$ **Úloha 6.** Nechť G je grupa a H její konečná podgrupa řádu n. Nechť existuje prvek $g \in G$ takový, že $(gh)^3 = 1$ pro všechny $h \in H$. Ukažte, že vzájemným násobením prvků množiny $\{hg : h \in H\}$ lze získat nejvýše $3n^2$ prvků G.

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`