1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 17. 10. 2018.

Úloha 1. Existuje nekonstantní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je periodická s libovolně malou periodou (tedy pro každé $r > 0$ existuje $0 < p < r$, že $f(x+p) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$)? A existuje taková spojitá funkce?

Úloha 2. V trojúhelníku ABC označme r poloměr kružnice vepsané a r_a, r_b, r_c po řadě poloměry kružnic připsaných ke stranám BC, AC, AB. Dokažte, že pokud

$$\sqrt{r_a} + \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c} = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r},$$

pak je trojúhelník ABC rovnostranný.

Úloha 3. Pro jaká $x_1 \in (0, 2)$ konverguje posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zadaná pro $n = 1, 2, \ldots$ rekurentní formulí $x_{n+1} = 1 + \sqrt{2x_n - x_n^2}$?

Úloha 4. Na každé stěně šestistěnné hrací kostky je napsáno nějaké reálné číslo. Kostka padne na každou hranu s pravděpodobností $\frac{1}{12}$. Je možné, aby součet čísel na horních dvou stěnách nabýval každé z hodnot $1, 2, 3, 4, 5, 6$ s pravděpodobností $\frac{1}{6}$?

Úloha 5. V rovině je dána konečná množina bodů s celočíselnými souřadnicemi. Je možné obarvit každý bod množiny bíle nebo červeně takovým způsobem, aby se na každé přímce rovnoběžné s některou z os lišil počet bílých a červených bodů nejvýše o jedna?

Úloha 6. Pro každé přirozené číslo n zapišme racionální číslo $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ jako zlomek v základním tvaru $\frac{p_n}{q_n}$. Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž q_n není dělitelné pěti.