6. soutěžní série – řešení

1. Bijekce f dokazující stejnou mohutnost obou množin vypadá takto: K vyjádření n jako uspořádaného součtu jedniček a dvojek přidáme nakonec jednu dvojku. Pak součet rozsekáme na úseky, jejichž poslední sčítance budou dvojky tohoto výrazu. Takto získáme $n+2$ jako součet čísel větších než jedna. Máme-li naopak vyjádření $n+2$ jako součet čísel větších než jedna, jistě vzniklo z nějakého součtu jedniček a dvojek – každé číslo větší než jedna nahradíme dvojkou, které předchází příslušný počet jedniček. Tedy f je prosté a na.

2. Po vyzkoušení $B = A^{-1}$ okamžitě vidíme, že pro všechna $q \neq 1$ vyhovuje matice $B = \frac{1}{1-q} A^{-1}$. Pro $q = 1$ naopak žádná matice B nemůže vyhovovat, protože by nesouhlasily stopy levé a pravé strany rovnice: $n = \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(AB - BA) = 0$.

3. Protože $EF \parallel AC$ a $|AC| = 1$, je $|EF| = \frac{|EF|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|BC|}$. Tento poměr se snadno spočítá pomocí úhlení a několika sinových vět. Ke kratšímu řešení vede následující trik: buď G souměrný s C podle přímky AB. Protože úhly ADC i BDE jsou oba rovny $\frac{\pi-\alpha}{2}$, tedy i ADG má tuto velikost, a tudíž D leží na EG. Úhly BCD a BED jsou $\frac{\alpha}{2}$ a $\frac{3\alpha}{2}$. Pak stačí použít jedna sinová věta v trojúhelníku BEG:

$$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|BG|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}} \to \frac{1}{3}.$$

4. Zajímá nás jen integrál funkce x^{x+1}, přičemž posunujeme meze. Označme si $g(y) = \int_0^y x^{x+1}\,\mathrm{d}x$ hladkou funkci splňující $g(0) = 0$. Pak máme

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0^+} \frac{g(y)}{y^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{g'(y)}{2y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{y+1}}{2y}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{y\to 0^+} y^y = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0^+} \exp(y \log(y)) = \frac{1}{2}.$$

Jiné řešení: Pro $x \in (0, \frac{1}{n})$ platí $x^{1+\frac{1}{n}} \leq x^{x+1} \leq x$. Limity s oběmi ohraničujícími funkcemi jsou $\frac{1}{2}$, takže také hledaná limita je $\frac{1}{2}$.