5. soutěžní série

24. 4. 2023

Úloha 1. Označme jako $f(n)$ nejmenší kladné celé číslo takové, že kdykoliv π je permutace na n prvcích, pak $\pi^{f(n)}$ je identita. Ukažte, že $f(n) = pf(n-1)$ pokud n je mocnina prvočísla p, a $f(n) = f(n-1)$ pokud n není mocnina prvočísla. (5 bodů)

Úloha 2. Buď $A = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$ množina a $f : A \to A$ funkce daná předpisem $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Najděte $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(A)$, kde $f^{(n)}$ značí funkci f aplikovanou n-krát. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou navzájem různá reálná čísla taková, že v matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij} = x_i + y_j$ jsou součiny prvků v každém sloupci rovny konstantě c. Najděte všechny možné hodnoty součinů prvků jednotlivých řádků A. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Uvažujme spojitou funkci $f : D \to \mathbb{R}$, která má ve vnitřku D parciální derivace $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$. Předpokládejme, že $f(x, y) \in [-1, 1]$ pro každé $(x, y) \in D$. Ukažte, že existuje bod (a, b) ve vnitřku D takový, že $f_1(a, b)^2 + f_2(a, b)^2 < 16$. (15 bodů)