

3. soutěžní série

20. 3. 2023

Úloha 1. Určete hodnotu výrazu

$$\frac{1}{\log_2 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_3 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_4 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_5 \frac{1}{7}} + \frac{1}{\log_6 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_7 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_8 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_9 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\log_{10} \frac{1}{7}}.$$

(5 bodů)

Úloha 2. Uvažujme diferencovatelnou funkci $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s jednostrannými derivacemi v krajních bodech intervalu splňující $f(-1) = f(1) = 0$. Ukažte, že existuje $x \in [-1, 1]$, ve kterém $f(x) = (1+x^2)f'(x)$.
(10 bodů)

Úloha 3. Dva hráči se střídají v odebírání sirek z hromádky n sirek, kde $n \geq 2$. Při prvním tahu je možné odebrat 1 až $n-1$ sirek. V každém dalším tahu je možné odebrat alespoň jednu a nejvýše tolik, kolik bylo odebráno v minulém tahu. Vyhraje ten, kdo odebere poslední sirku. Rozhodněte, kdo má (v závislosti na n) vyhrávající strategii.
(10 bodů)

Úloha 4. Nechť A je čtvercová matice řádu n s komplexními prvky, pro kterou platí $A + A^* = A^2 A^*$. Ukažte, že $A = A^*$.
(15 bodů)