2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 13. 3. 2023.

Úloha 1. Řekneme, že délka čísla n je k, pokud dekadický zápis n^2 končí právě k stejnými nenulovými číslicemi. Jakou největší délku může mít přirozené číslo? Najděte nejmenší přirozené číslo s touto délkou.

Úloha 2. Náhodně, nezávisle na sobě vybereme dvě čísla z $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pravděpodobnost, že jejich součet bude druhou mocninou, označme p_n. Najděte $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, p_n$.

Úloha 3. Nechť f je spojitá omezená funkce na $\mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = 0.$$

Rozhodněte, zda odtud plyne, že f je stejnoměrně spojitá.

Úloha 4. Pro která přirozená n existují matice A, B, C řádu n s celočíselnými prvky splňující $ABC + BCA + CAB = I_n$?

Úloha 5. Buď $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a definujme induktivně $f_1 = f$, $f_{k+1}(n) = \sum_{d|n} f_k(d)$. Dokažte, že pokud $f_k = f_1$ pro nějaké $k > 1$, pak $f = 0$.

Úloha 6. Je dán nekonečný graf G takový, že pro každou jeho spočetně nekonečnou podmnožinu vrcholů A existuje vrchol $v \in G \setminus A$ sousedící s nekonečně mnoha vrcholy A. Ukažte, že existuje spočetně nekonečná podmnožina vrcholů A taková, pro kterou existuje nespočetně nekonečně vrcholů $v \in G \setminus A$ sousedících s nekonečně mnoha vrcholy A.