1. soutěžní série – řešení

1. Posloupnost lze přepsat jako

$$2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{9}}, 2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{9}}2^{\frac{1}{27}}, \ldots$$

Protože $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ a exponenciála je spojitá funkce, je

$$\lim 2^{s_n} = 2^{\lim s_n} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

(s_n jsou částečné součty řady $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$).

2. Na každém ramenu nalezneme bod ležící v naší množině. Tyto body označme jako A, B, C, D, kde A leží v prvním kvadrantu, B v druhém, atd. Označme souřadnice A a B jako $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ a $\left(b, -\frac{1}{b}\right)$, kde $a, b > 0$. Použijeme, že trojúhelník z bodů $(0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ má obsah $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$. (To plyne z mnoha důvodů, například z dokreslení nejmenšího obdélníku se stranami rovnoběžnými s osami, který tento trojúhelník obsahuje, a dopočítání.) Pak obsah trojúhelníku OAB, kde O je počátek souřadnicové osy, je $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Protože $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ (protože to se ekvivalentními úravami dá převést na $(a-b)^2 \geq 0$), má trojúhelník OAB obsah alespoň 1. Analogicky (můžeme celou situaci otočit kolem počátku) mají i trojúhelníky OBC, OCD a ODA obsah alespoň 1, čili (protože O zjevně leží uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$) má čtyřúhelník $ABCD$ obsah alespoň 4. Protože naše množina je konvexní, obsahuje čtyřúhelník $ABCD$, takže má také obsah alespoň 4. Zároveň obsahu 4 lze dosáhnout - naše množina může být čtverec s vrcholy $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$.

3. Ukážeme, že pro každý dělitel d čísla $n-1$ je $d + \frac{n-1}{d} = \frac{n+d^2-1}{d}$ dělitelné číslem 24: Protože $d|n-1$, je d nesoudělné s 24 a stačí dokázat, že 24 dělí čitatel zlomku, tj. $n+d^2-1$. Dále $24|n$ ze zadání. Dále $n-1$ je liché, tj. d je liché a $d^2-1 = (d-1)(d+1)$ je součin dvou sousedních sudých čísel, který je jistě dělitelný osmi. Zároveň d není dělitelné třemi, takže d^2-1 je dělitelné třemi. Dohromady tedy $24|d + \frac{n-1}{d}$. Zbývá si uvědomit, že dělitele čísla $n-1$ lze rozdělit na dvojice d, $\frac{n-1}{d}$, tj. že $n-1$ není druhou mocninou. To plyne např. z toho, že $n-1 \equiv -1 \pmod 3$. Tím je důkaz hotov.

4. Levou stranu upravíme do tvaru Abelovské sumy

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)(a_1+\cdots+a_i).$$

Sečtením dvojic $a_1 + a_{i-1} \geq a_i$, $a_2 + a_{i-2} \geq a_i, \ldots$ vyjde nerovnost $2(a_1+\cdots+a_{i-1}) \geq (i-1)a_i$ ekvivalentní s $(i+1)(a_1+\cdots+a_{i-1}) \geq (i-1)(a_1+\cdots+a_i)$, tedy $\frac{a_1+\cdots+a_{i-1}}{1+\cdots+i-1} \geq \frac{a_1+\cdots+a_i}{1+\cdots+i}$. Opakovaně použijeme tuto nerovnost, všimneme si teleskopických rozdílů $\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$ a nakonec použijeme $a_1+\cdots+a_n \geq \frac{n+1}{2}a_n$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{1}+\cdots+\frac{a_n}{n} &\geq (a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\frac{i(i+1)}{n(n+1)}\right)\\
&= (a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)\\
&= (a_1+\cdots+a_n)\frac{2}{n+1} \geq a_n.
\end{aligned}$$