

5. soutěžní série

25. 4. 2022

Úloha 1. Daný mnohostěn má aspoň 5 stěn a z každého vrcholu vychází právě 3 hrany. Dva hráči střídavě obarvují dosud neobarvené stěny, každý svou barvou. Vyhrává ten hráč, který jako první obarví tři stěny se společným vrcholem. Ukažte, že začínající hráč má vyhrávající strategii. (5 bodů)

Úloha 2. ABC je ostroúhlý trojúhelník s obsahem 1. Obdélník R má vrcholy R_1, R_2 na straně BC , R_3 na straně AC a R_4 na straně AB . Dále uvažujme obdélník S podobným způsobem umístěný do trojúhelníku AR_3R_4 . Určete maximální součet obsahů R a S (přes všechny trojúhelníky a všechny možné obdélníky). (10 bodů)

Úloha 3. Najděte všechny symetrické matice řádu n , jejichž prvky jsou pouze nuly a jedničky takové, že všechna jejich vlastní čísla jsou kladná. (10 bodů)

Úloha 4. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ které mají primitivní funkci a pro které platí, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(2x) = f(x)$. (15 bodů)