

5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 2. 5. 2022.

Úloha 1. Buď $A = (a_{ij})$ $n \times n$ matice, kde a_{ij} je zbytek po dělení třemi čísla $i^j + j^i$ pro $i, j = 1, 2, \dots, n$. Najděte největší n , pro něž $\det A \neq 0$.

Úloha 2. V rovině leží body A_1, A_2, \dots, A_6 . Buď D největší vzdálenost některé dvojice bodů a d nejmenší vzdálenost dvojice bodů. Ukažte $\frac{D}{d} \geq \sqrt{3}$.

Úloha 3. Posloupnost $a_i, i = 1, \dots$ obsahuje čísla z intervalu $[0, 1]$ volena nezávisle se stejnouměrnou distribucí. Ukažte, že očekávaná hodnota n , pro které $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ a $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \leq 1$, je e .

Úloha 4. Dokažte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x - x \sin x}{x^3} dx = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Úloha 5. Rozhodněte, zda existuje nespočetná množina X a binární operace $*$: $X \times X \rightarrow X$, pro něž platí: jsou-li $Y, Z \subset X$ uzavřené vzhledem k $*$, pak $Y \subset Z$ nebo $Z \subset Y$.

★ **Úloha 6.** Rovinu rozdělíme pomocí n přímk, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jediném bodě. Kolik nejméně a kolik nejvíce ze vzniklých oblastí mohou být úhly (neomezená oblast ohraničená pouze dvěma polopřímkami)?