4. soutěžní série

4. 4. 2022

Úloha 1. Uvažujme čísla $d_1, \ldots, d_{12} \in [1, 12)$. Pak existují tři různé indexy i, j, k takové, že d_i, d_j a d_k jsou délky stran ostroúhlého trojúhelníka. Dokažte. (5 bodů)

Úloha 2. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ platí

$$f(2f(x)) = x + 2022.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Pro daná reálná čísla x a y je množina

$$\{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

konečná. Rozhodněte, zda nutně $x, y \in \mathbb{Q}$. (10 bodů)

Úloha 4. Některé vrcholy čtvercové sítě $n \times n$ jsou obarveny tak, že každý čtverec se stranami ležícími v této síti má alespoň jeden obarvený bod na svém obvodu. Buď $l(n)$ nejmenší nutný počet obarvených vrcholů. Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$. (15 bodů)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`