

1. soutěžní série

21. 1. 2022

Úloha 1. Polynom f s celočíselnými koeficienty splňuje $f(7) = 77$, $f(b) = 85$ a $f(c) = 0$, kde $7 < b < c$ jsou celá čísla. Najděte b a c .
(5 bodů)

Úloha 2. Existuje nějaký konečný okruh (ne nutně komutativní nebo s jednotkou) takový, že každý jeho prvek x je druhou mocninou nějakého prvku $y \neq x$.
(10 bodů)

Úloha 3. Nechť f je měřitelná funkce na \mathbb{R} taková, že $x^3 f(x) \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow +\infty$. Najděte limitu

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \left(c \int_c^{\infty} (x - c) f(x) dx \right).$$

(10 bodů)

Úloha 4. Buď $a(n)$ počet možných rozmístění n identických míčků do několika košů takovým způsobem, že počet míčků v každém koši je větší nebo roven počtu míčků ve všech předchozích koších dohromady. Označme $b(n)$ počet způsobů, jak lze napsat číslo n jako součet mocnin dvojky seřazených od nejmenší po největší. Ukažte, že $a(n) = b(n)$ pro všechna n .
(15 bodů)