# 1. soutěžní série – řešení

**1.** Protože $f$ je polynom s celočíselnými koeficienty, platí $x-y \mid f(x)-f(y)$ kdykoliv $x$ a $y$ jsou celá čísla. Tedy $b-7 \mid 8$, $c-b \mid -85$ a $c-7 \mid -77$. Protože $7 < b < c$, musí být $b-7 \in \{1,2,4,8\}$, $c-b \in \{1,5,17,85\}$ a $c-7 \in \{1,7,11,77\}$. Jednoduše (např. pomocí tabulky) nahlédneme, že jediný způsob, jakým se prvek první množiny a prvek druhé množiny sečtou na prvek třetí množiny, je $2+5=7$. Tedy, protože $c-7=(b-7)+(c-b)$, musí být $c-7=7$, $b-7=2$ a $c-b=5$, čili $b=9$ a $c=14$. To je tedy jediná možnost. (A může nastat - např. pro $f(x)=(14-x)(3x-10)$.)

**2.** Neexistuje. Dle dané podmínky každému prvku $x$ okruhu $R$ náleží alespoň jedna odmocnina $y \in R$. Každé $y$ může být odmocninou jen jednohu prvku ($x_1 = y^2 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$) a odmocniny $y$ i jejich druhé mocniny náleží do konečné množiny $R$, takže musí existovat bijekce mezi prvky $x$ a jejich odmocninami $y_x \neq x$. Ale nula má dvě různé odmocniny: $y_0^2 = 0 = 0^2$, spor.

**3.** Nejprve spočteme $c\int_c^\infty \frac{x-c}{x^3}\,\mathrm{d}x = c\left[-\frac{1}{x}+\frac{c}{2x^2}\right]_c^\infty = \frac{1}{2}$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $c_\varepsilon$ takové, že $f(x) \in \left(\frac{1-\varepsilon}{x^3}, \frac{1+\varepsilon}{x^3}\right)$, $x > c_\varepsilon$. Pro všechna $c > c_\varepsilon$ tedy platí

$$\frac{1-\varepsilon}{2} = c\int_c^\infty \frac{(x-c)(1-\varepsilon)}{x^3}\,\mathrm{d}x \le c\int_c^\infty (x-c)f(x)\,\mathrm{d}x \le c\int_c^\infty \frac{(x-c)(1+\varepsilon)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1+\varepsilon}{2}.$$

Hledanou limitou je $\frac{1}{2}$. Měřitelná funkce $(x-c)f(x)$ je integrovatelná alespoň na intervalu $(c_1,\infty)$, kde má majorantu $2\frac{x-c}{x^3}$.

**4.** Jistě $a(1)=1=b(1)$. Ukážeme, že obě posloupnosti splňují stejnou rekurenci $a(2m+1)=a(2m)$, $a(2m)=a(2m-1)+a(m)$.

Posloupnost $a$: Je-li $n=2m+1$ liché, pak poslední koš obsahuje víc než polovinu míčků a odebráním jednoho míčku dostaneme přijatelné rozdělení pro $n-1=2m$ míčků. Je-li $n=2m$ sudé, pak buď obsahuje poslední koš více než polovinu míčků, pak odebráním jednoho získáme rozdělení $n-1$ míčků, nebo poslední koš obsahuje přesně polovinu míčků, pak předchozí koše dávají přijatelné rozdělení $n/2$ míčků.

Posloupnost $b$: Je-li $n=2m+1$ liché, pak každý rozklad $n$ můžeme napsat jako 1+ rozklad $n-1$. Je-li $n=2m$ sudé, pak rozklady obsahující jedničku spárujeme s rozklady čísla $n-1$ tak, že tuto jedničku odebereme. U rozkladů neobsahujících jedničku vydělíme všechny čísla dvěma, tím získáme párování s rozklady čísla $n/2$.