4. soutěžní série – řešení

1. Nechť A je následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \end{pmatrix}$$

Protože její první a druhý řádek se shodují, je její determinant roven nule. Zároveň pokud uděláme rozvoj determinantu A podle prvního řádku, dostaneme $0 = \det A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$, tedy skutečně $A_1 + A_3 + \dots = A_2 + A_4 + \dots$.

2. Pokud $f(z) = 0$, pak z dané rovnice plyne $f(z^2) = 0$, $f((z-1)^2) = 0$. Konečná množina kořenů f je uzavřená na operaci $z \mapsto z^2$, tedy buď $z = 0$ nebo $|z| = 1$ a operace $z \mapsto (z-1)^2$ ji navíc po rozmyšlení omezí pouze na $0, 1$. Tedy $f(x) = ax^m(x-1)^n$. Dosazením do dané rovnice dostáváme $ax^{2m}(x^2-1)^n + ax^m(x-1)^n a(x+1)^m x^n = 0$. Pro $a = 0$ vyhovuje $f(x) = 0$. Pro $a \neq 0$ (a $x \neq 0, 1$) máme $x^m(x+1)^n + a(x+1)^m x^n = 0$, tedy $a = -\left(\frac{x}{x+1}\right)^{m-n}$, což je splněno právě pro $m = n$, $a = -1$. Vyhovují polynomy $f(x) = -x^n(x-1)^n$, $n = 0, 1, \dots$ a $f(x) = 0$.

3. Všech n jednoprvkových množin vyhovuje. Pokud má alespoň dvouprvková množina průměr k a neobsahuje prvek k, pak do ní můžeme přidat k a nová větší množina má stále stejný průměr. Pokud má víceprvková množina průměr k a obsahuje prvek k, pak musí obsahovat i prvky větší i menší než k, tedy po odebrání k bude mít stále stejný průměr a zůstane alespoň dvouprvkovou. Tím jsme spárovali všechny alespoň dvouprvkové množiny počítané v T_n, tedy $T_n = 2m + n$ a $T_n - n$ je sudé.

4. Uvažujme rovnostranný trojúhelník v komplexní rovině tak, že jeho vrcholy jsou 1, ω, ω^2, kde $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$. Vzálenosti bodu x od vrcholů jsou pak $|1-x|$, $|\omega - x|$, $|\omega^2 - x|$. Všimněme si, že

$$(1-x) + \omega(\omega - x) + \omega^2(\omega^2 - x) = 0.$$

Tato rovnost nám říká, že trojúhelník s uvažovanými délkami stran existuje a zároveň udává směrové vektory jeho stran. Obsah trojúhelníka KLM s $u = \vec{KL}$, $v = \vec{KM}$ je roven $\frac{1}{2}|\det(u,v)|$, což při zápisu pomocí komplexních čísel dává

$$S = \frac{1}{2}|\Re u \Im v - \Re v \Im u| = \frac{1}{2}|\Im(\bar{u}v)|$$

a při $u = 1 - x$, $v = \omega(x - \omega)$ máme

$$\Im(\bar{u}v) = \Im[(1-\bar{x})\omega(x-\omega)] = -\Im\omega^2 - \Im\omega x\bar{x} + \Im(\omega x + \omega^2 \bar{x}) = -\Im\omega^2 + \Im\omega|x|^2 + 0,$$

což závisí jen na $|x|$, což jsme chtěli dokázat.