1. soutěžní série

8. 3. 2021

Úloha 1. Pro čtyřmístné číslo $N = \overline{abcd}$ označme $p(N) = \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ nejmenší přirozené číslo, pro něž je číslo $\overline{ab\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k cd}$ dělitelné N. Určete $p(2025)$. (10 bodů)

Úloha 2. Mějme šestiúhelník $ABCDEF$, kterému lze opsat kružnici o poloměru 1 a pro který platí $|AB| = |CD| = |EF| = 1$. Nechť K, L, M jsou středy stran BC, DE a FA. Ukažte, že trojúhelník KLM je rovnostranný. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť a, b, c jsou taková reálná čísla, že $a > 0$ a polynom

$$T(x) = ax^2 + bcx + b^3 + c^3 - 4abc$$

nemá reálné kořeny. Ukažte, že právě jeden z polynomů $T_1(x) = ax^2 + bx + c$, $T_2(x) = ax^2 + cx + b$ je kladný na celém $\mathbb{R}$. (10 bodů)

Úloha 4. Dokažte, že pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} na_n > 0$,
2. splňuje-li nerostoucí posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ nerovnost $b_k \geq a_k$ pro nekonečně mnoho k, pak $\sum b_k = \infty$.

(10 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`