1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 15. 3. 2021.

Úloha 1. Do tabulky $n \times n$ postupně vepisujeme čísla $1, 2, \ldots, n^2$ v tomto pořadí, každé do některého z dosud prázdných políček. Po napsání každého z nich si zaznamenáme součet už napsaných čísel v daném sloupci a řádku. Na závěr sečteme všechna zaznamenaná čísla. Pro které rozmístění dostaneme nejmenší možný součet? (uveďte aspoň jedno)

Úloha 2. Body D a E ležící uvnitř stran AB a AC trojúhelníku ABC jsou zvoleny tak, že $DE \parallel BC$ a DE je tečnou kružnice vepsané ABC. Dokažte, že

$$|DE| \leq \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{8}.$$

Úloha 3. Buď (A_n) posloupnost čtvercových reálných matic řádu m daných předpisem: $A_0 = A$, $A_{n+1} = A_n^2 - A_n + \frac{3}{4}I$, $n \geq 0$, kde I je jednotková matice a A je symetrická pozitivně definitní se stopou $\mathrm{tr}(A) < 1$. Najděte $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Úloha 4. Pro přirozené číslo $n > 1$ označme

$$f(n) = \gcd \{k^n - k : \ k = 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Najděte $f(n)$, konkrétně určete $f(2021)$.

Úloha 5. Ukažte, že

$$\int_0^\infty \frac{x \sinh x}{3 + 4\sinh^2 x} dx = \frac{\pi^2}{24}.$$

Úloha 6. Buď $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ reálná čísla taková, že se každý z rozdílů $x_i - x_j$, $1 \leq j < i \leq n$ vyskytne nejvýše dvakrát. Dokažte, že počet rozdílů vyskytujících se právě jednou je alespoň $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.