

6. soutěžní série

6. 5. 2020

Úloha 1. Uvažujme řetěz 54 jednotkových čtverců takový, že každé dva po sobě jdoucí jsou spojeny ve společném vrcholu a každý čtverec je se sousedy spojen protějším vrcholy. Je možné pokrýt tímto řetězem povrch krychle $3 \times 3 \times 3$? (5 bodů)

Úloha 2. Uvažujme pravidelný n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se středem O . Nechť na polopřímce OA_1 mimo n -úhelník leží bod X . Ukažte, že

$$|A_1X||A_2X| \cdots |A_nX| + |OA_1|^n = |OX|^n.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Definujme induktivně množiny $S_1 = \{1\}$ a $S_k = (S_{k-1} + k) \cup \{2k - 1\}$ pro $k = 2, 3, \dots$, kde $A + k = \{a + k : a \in A\}$. Určete množinu $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ (10 bodů)

Úloha 4. Buď F_n n -té Fibonacciho číslo a i imaginární jednotka. Dokažte

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{3^k} - 2F_{1+3^k}}{F_{3^k} + iF_{2 \cdot 3^k}} = i + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

(15 bodů)