5. soutěžní série

22. 4. 2020

Úloha 1. Dokažte

$$\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\rfloor=\lfloor\sqrt{9n+8}\rfloor$$

pro každé přirozené číslo n. Zde $\lfloor z\rfloor$ značí celou část čísla z.

(5 bodů)

Úloha 2. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\cos^2\frac{\pi(x_1+\cdots+x_n)}{2n+1}\,\mathrm{d}x_1\ldots\,\mathrm{d}x_n.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Grupa G je generována prvky g a h, které splňují $g^4=1$, $g^2\neq 1$, $h^7=1$, $h\neq 1$, $ghg^{-1}h=1$. Vypište všechny prvky grupy G, které jsou druhými mocninami. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť M je nějaká množina 2020 přirozenných čísel. Pokud A je podmnožina M, pak jako $f(A)$ zadefinujeme množinu těch prvků M, které mají v A lichý počet dělitelů. Pro jaké nejmenší k lze podmnožiny libovolné takové M obarvit k barvami tak, že pokud $A\neq f(A)$, pak A a $f(A)$ mají různou barvu? (15 bodů)