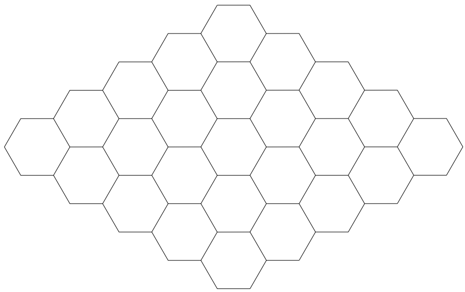
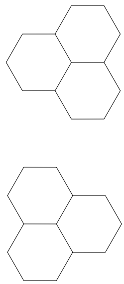
4. soutěžní série

8. 4. 2020

Úloha 1. Uvažujme šestiúhelníkovou síť tvořenou $(2n+1) \times (2n+1)$ pravidelnými šestiúhelníky (na obrázku vlevo pro $n = 2$), z nichž prostřední šestiúhelník odstraníme. Pokud $n \not\equiv 1 \pmod 3$, pak lze tento objekt pokrýt triminy tvořenými trojicí navzájem sousedících šestiúhelníků (na obrázku vpravo). Dokažte. (5 bodů)





Úloha 2. *Iracionální množinou bodu* $P \in \mathbb{R}^2$ nazveme množinu všech bodů roviny, které mají od bodu P iracionální vzdálenost. Jaký nejmenší počet bodů potřebujeme, aby sjednocení jejich iracionálních množin byla celá rovina? (10 bodů)

Úloha 3. Pro která přirozená čísla d existuje $k \geq 3$ takové, že můžeme d, $2d$, $3d$, $\dots$, kd napsat do řádku tak, že součet libovolných dvou sousedících čísel je čtverec? (10 bodů)

Úloha 4. Nechť G je jednoduchá nekomutativní grupa a Φ její automorfismus splňující $x\Phi(x) = \Phi(x)x$ pro každé $x \in G$. Ukažte, že Φ je identita. (Definice potřebných pojmů najdete zde.) (15 bodů)