4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 15. 4. 2020.

Úloha 1. Máme dvě krabice. Jedna z nich obsahuje 100 červených míčků s čísly 1, 2, $\ldots$, 100. Druhá obsahuje 100 modrých míčků s čísly 101, 102, $\ldots$, 200. Z první krabice náhodně vytáhneme a míčků a z druhé náhodně vytáhneme b míčků. Nalezněte nejmenší s takové, že existují a, b, že $a + b = s$ a kdykoliv provedeme výše popsanou operaci, dají se z vytažených míčků najít dva (různé) červené míčky, součet jejichž čísel se nachází na některém z vytažených modrých míčků.

Úloha 2. Pro spojitou funkci $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ platí, že má ve všech nezáporných celých číslech stejnou hodnotu. Navíc kdykoliv máme $0 \leq a < b < c < d$ taková, že $f(a) = f(c)$ a $f(b) = f(d)$, tak platí i $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{c+d}{2}\right)$. Ukažte, že f je konstantní.

Úloha 3. Existuje taková množina kružnic, že každá přímka v rovině je tečná k právě jedné z těchto kružnic?

Úloha 4. Najděte všechna řešení (m, n) rovnice

$$1997^{1001}(m^2 - 1) + 5 - 2m = 3\binom{2003^{2004}}{n}$$

v celých číslech.

⋆ **Úloha 5.** Buď D neprázdná, otevřená, souvislá, relativně kompaktní podmnožina metrického prostoru (X, d). Nechť $f : D \to D$ je spojitá a $f(D)$ otevřená. Ukažte, že existuje $x_0 \in D$ splňující

$$d(x_0, \partial D) = d(f(x_0), \partial D),$$

kde ∂D značí hranici množiny D.

⋆ **Úloha 6.** Konečná grupa G obsahuje reálné matice $n \times n$ s operací maticového násobení. Nechť je součet stop prvků G nulový. Ukažte, že součet prvků G je nulová matice.