3. soutěžní série – řešení

1. Mějme systém tvořený největším počtem množin. Pokud libovolný prvek odstraníme ze všech množin, ve kterých byl, a naopak ho přidáme do množin, ve kterých nebyl, získáme tím stejně velký systém s danou vlastností. Můžeme tedy předpokládat, že v našem systému je každý prvek v nejvýše jedné množině. Odtud plyne, že množin je nejvýše $n+1$. Navíc systém tvořený prázdnou množinou a všemi jednoprvkovými množinami vyhovuje.

2. Pokud neznáte Matrix determinant lemma, lze řešit např. takto: Máme

$$\det(A+B) = \sum_\sigma \prod_{i=1}^n (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}),$$

kde σ probíhá všechny permutace. Roznásobíme-li součin závorek, rozpadne se na součet součinů, které si z některé závorky vezmou člen $a_{i\sigma(i)}$ a z jiné $b_{j\sigma(j)}$. Uvědomme si, že ty součiny, které si vezmou aspoň ze dvou závorek prvek $b_{i\sigma(i)}$ se posčítají na nulu, protože ten jejich součet odpovídá determinantům matic, které obsahují aspoň 2 řádky z B a ty jsou lineárně závislé. Je tedy

$$\det(A+B) = \sum_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} + \sum_\sigma \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)} = \det A + Z,$$

kde v každém součinu je právě jeden člen $c_{i\sigma(i)}$ roven $b_{i\sigma(i)}$ a ostatní jsou $a_{i\sigma(i)}$. Obdobně máme

$$\det(A-B) = \det A - Z.$$

Nyní už snadno $\det((A-B)(A+B)) = \det(A-B)\det(A+B) = (\det A - Z)(\det A + Z) \leq \det(A^2)$.

3. Ukážeme, že jsou to právě mocniny dvojky.

Nechť N_i je nejmenší člen posloupnosti takový, že $N_i \geq i^k$ (speciálně $N_1 = 1$). Položme taky e_i jako $N_i - i^k$. Zajímá nás, pro která a_j je to k-tá mocnina, čili kdy je $e_i = 0$. Protože N_{i+1} vznikne z N_i tím, že opakovaně přičítáme i, dokud nepřekonáme $(i+1)^k$, je $N_{i+1} = N_i + i\lceil\frac{(i+1)^k - N_i}{i}\rceil = N_i + i\lceil\frac{(i+1)^k - i^k - e_i}{i}\rceil = N_i + i\lceil\left(\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j} i^{k-j-1}\right) - \frac{e_i - 1}{i}\rceil$.

Kdyby bylo $e_i \geq i$, pak $N_i - i \geq i^k$, tedy člen posloupnosti předcházející N_i už musí být větší roven i^k, což je spor. Tedy $e_i < i$. To znamená, že pokud $e_i > 0$, pak $0 \leq \frac{e_i-1}{i} < 1$, tedy $N_{i+1} = N_i + i\left(\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j} i^{k-j-1}\right) = (i^k + e_i) + ((i+1)^k - i^k - 1) = (i+k)^k + e_i - 1$.
Tedy pokud $e_i > 0$, pak $e_{i+1} = e_i - 1$.

Zjevně $N_2 = 2^k$. Indukcí předpokládejme, že $N_{2^r} = 2^{rk}$. Pak díky $(2^r+1)^k \equiv 1 \pmod{2^r}$ je $e_{2^r+1} = 2^r - 1$, což znamená, že bude $e_{2^r+k} = 2^r - k$ až do $k = 2^r$, kdy dostaneme $e2^{r+1} = 0$.

Tímdostáváme, že vyhovovat budou právě mocniny dvojky.

4. Protože $\sin(x)\sin(x^2)$ je spojitá, stačí nám zkoumat integrál $\int_1^t \sin(x)\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$. Potom díky dvojí aplikaci integrace per partes dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_1^t \sin(x)\sin(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_1^t \frac{\sin(x)}{2x}\cdot\big(2x\sin(x^2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\sin(x)}{2x}\cos(x^2)\right]_1^t + \int_1^t \left(\frac{\cos(x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{2x^2}\right)\cdot\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\sin(x)}{2x}\cos(x^2)\right]_1^t - \int_1^t \frac{\sin(x)}{2x^2}\cdot\cos(x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^t \frac{\cos(x)}{(2x)^2}\cdot\big(2x\cos(x^2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\sin(x)}{2x}\cos(x^2)\right]_1^t - \int_1^t \frac{\sin(x)}{2x^2}\cdot\cos(x^2)\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \left[\frac{\cos(x)}{4x^2}\sin(x^2)\right]_1^t - \int_1^t \frac{2x\cos(x) - \sin(x)}{4x^3}\cdot\sin(x^2)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Protože $-\frac{\sin(x)}{2x}\cos(x^2)$ i $\frac{\cos(x)}{4x^2}\sin(x^2)$ jdou v nekonečnu do nuly a oba integrály na pravé straně absolutně konvergují (oba se dají limitně srovnat s $\frac{1}{x^2}$), dostáváme požadovanou konvergenci.