3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 1. 4. 2020.

Úloha 1. Existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro niž $|f(x+y)+\sin x+\cos y| < 2$ pro všechna x, $y \in \mathbb{R}$?

Úloha 2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (a, b) splňující $a^b + a + b = b^a$.

Úloha 3. Konvexní mnohoúhelník $P = A_1 \dots A_n$ nazveme *vyvážený*, jestliže existuje jeho vnitřní bod M, pro nějž průsečíky polopřímek A_iM, A_jM s obvodem P leží uvnitř různých stran P kdykoli $1 \leq i < j, \leq n$. Rozhodněte o platnosti tvrzení: (a) žádný mnohoúhelník se sudým počtem vrcholů není vyvážený, (b) každý mnohoúhelník s lichým počtem vrcholů je vyvážený.

Úloha 4. Buďte a, b, c kladná čísla. Označme $A(x, y, z)$ matici

$$\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte objem tělesa

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \text{matice } A(x, y, z) \text{ je pozitivně definitní}\}.$$

Úloha 5. Buď $n \in \mathbb{N}$. Nalezněte největší možnou velikost množiny $S \subset \mathbb{Z}^n$ takové, že $\forall a, b \in S$ je $|a \cdot b| \leq 1$

$\star$ **Úloha 6.** Nalezněte všechny binární operace $\diamond : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna kladná a, b, c je $a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \cdot c$ a pro každé $a \geq 1$ je $a \diamond a \geq 1$.

Při řešení můžete použít známou větu, že pokud $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce splňující pro všechna reálná x, y rovnost $f(x+y) = f(x)+f(y)$, která je navíc na nějakém nedegenerovaném intervalu zdola omezená, pak pro nějaké $k \in \mathbb{R}$ je $f(x) = kx$.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`