1. soutěžní série – řešení

1. Pro $k \geq 0$ vyhovuje funkce $f(x) = k^{\frac{1}{1+\sqrt{3}}} \operatorname{sgn}(x)|x|^{\sqrt{3}}$. Nechť $k < 0$, pak $f(f(\cdot))$ je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Speciálně je i funkce f prostá a zobrazuje $f(\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}$, takže i f je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Spojitá bijekce je navíc ostře monotonní, proto je f buď rostoucí nebo klesající. V obou případech je $f \circ f$ rostoucí a tedy pro $k < 0$ taková funkce neexistuje.

2. Odpověď zní $p-1$. Zjevně žádné číslo $m \geq p$ nemůže přispět do žádného z a_k. Ukážeme, že každé číslo mezi 1 a $p-1$ přispěje přesně jednou. Pro jedničku to je očividné - přspěje do a_1, ale do jiných už se nedostane. Když máme $p - 1 \geq m \geq 2$, z něsoudělnosti m a p musí každé z čísel $p+1$, $2p+1$, $\ldots$, $mp+1$ dávat jiný zbytek po dělení m (kdyby nějaká dvě dávala stejný zbytek, tak m dělí jejich rozdíl, tedy dělí nějaké ap s $0 < a < m$, ale to nejde). Protože jich je m, je mezi nimi přesně jedno dělitelné m a tedy m přispěje do přesně jednoho a_k.

3. Uvažujme seznam rozdílů $(b_2, \ldots, b_n)$, kde $b_i = a_i - a_{i-1} \mod(n+1)$. Představme si ekvivalentní úlohu: máme $n+1$ míst v kruhu a každý řidič po svém obsazeném místě pokračuje, dokud nenarazí na prázdné místo. Pak vždy zůstane právě jedno místo volné a naším cílem je zařídit, aby to bylo právě to poslední. Pro každý seznam rozdílů existuje právě jedno první oblíbené místo tak, aby prázdné zůstalo to poslední. Každému vyhovujícímu seznamu preferencí odpovídá právě jeden seznam rozdílů, a proto máme $(n+1)^{n-1}$ vyhovujících seznamů preferencí $(a_1, \ldots, a_n)$.

4. Nechť $x_n = 2\sin\theta_n$ a $y_n = 2\cos\theta_n$. pro nějaké $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pak $x_{n+1}^2 = 2 - 2\cos\phi_n = 4\sin^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$, tedy $x_{n+1} = 2\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. Potom $y_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{2\sin\theta_n}{2\sin\dfrac{\theta_n}{2}} = \dfrac{2\sin\dfrac{\theta_n}{2}\cos\dfrac{\theta_n}{2}}{\sin\dfrac{\theta_n}{2}} = 2\cos\dfrac{\theta_n}{2}$. Protože $x_1 = 1 = 2\sin\frac{\pi}{6}$ a $y_1 = \sqrt{3} = \cos\frac{\pi}{6}$, je $x_n = 2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$ a $y_n = 2\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$, tedy $x_n \to 0$ a $y_n \to 2$.