6. soutěžní série

15. 5. 2019

Úloha 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a p je prvočíslo, pro které $p^p | n!$. Musí platit, že $p^{p+1} | n!$? (5 bodů)

Úloha 2. Dva hráči se střídají při vyplňování písmen do tabulky 1×2019. Hráč svým tahem napíše buď S nebo O na libovolné volné místo v tabulce a může vyhrát vytvořením trojice po sobě jdoucích písmen SOS. Vyplnění tabulky bez SOS se považuje za remízu. Který z hráčů má vyhrávající strategii? (10 bodů)

Úloha 3. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a b_n je nejmenší společný násobek čísel $a_1, \ldots, a_n$. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ konverguje. (10 bodů)

Úloha 4. Najděte poloměr největší kružnice ležící na povrchu elipsoidu daného rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, kde $a > b > c > 0$. (15 bodů)