5. soutěžní série – řešení

1. Není to možné. Uvažme přímku, která není rovnoběžná s žádnou z os parabol. Každá z parabol ji protíná nejvýše ve dvou bodech a její vnitřek v úsečce konečné délky. Tedy z této přímky konečně mnoho vnitřků parabol pokryje pouze sjednocení konečně mnoha intervalů konečné délky.

2. U každého vrcholu si hodíme spravedlivou mincí, zda vrchol dáme do první, nebo do druhé skupiny. Střední hodnota počtu hran, které povedou napříč skupinami, je součet přes hrany z pravděpodobnosti, že právě příslušná hrana povede napříč, což je zřejmě $\frac{1}{2}$. Dohromady tedy vyšla přesně polovina počtu hran. Jistě ale existuje rozdělení (s kladnou pravděpodobností), v němž nevede napříč žádná hrana, například pokud je jedna z množin prázdná. Proto musí existovat rozdělení, v nemž napříč vede ostře více než polovina hran.

3. Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ jsou prvky ze dvou řádků matice. Podle předpokladů d dělí $\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} a_j$ a také $\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} b_j$, takže pro libovolné celé $c \in \mathbb{Z}$ také platí d dělí $\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j}(a_j - cb_j)$. Odečtením násobku jednoho řádku od druhého ani výměnou řádků se nezmění velikost determinantu matice. Zvolíme dvojici řádků a sloupec pevně a pomocí Euklidova algoritmu a řádkových úprav vynulujeme jeden prvek v daném sloupci, aniž bychom změnili velikost determinantu matice. Takto můžeme postupně vynulovat všechny prvky pod hlavní diagonálou, až nám nakonec zbude prvek a'_{nn}, který musí být dělitelný d a proto i celý determinant matice B je násobkem d.

4. Zřejmě $f(n) \geq \frac{1}{n}$, takže členy vyššího řádu (v $\frac{1}{n}$) můžeme ignorovat. Pak

$$f(n) \approx 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{i(n-i)}.$$

Navíc funkce $h(x) = \frac{1}{x(n-x)}$ je na intervalu $(1, \frac{n}{2})$ klesající a nezáporná. Proto lze sumu shora i zdola odhadnout integrály

$$2 \int_1^{\frac{n}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x \leq f(n) \leq 2 \left(\frac{1}{n-1} + \int_1^{\frac{n}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Tyto integrály snadno spočítáme rozkladem na parciální zlomky: $\int \frac{1}{x(n-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int \frac{1}{x} + \frac{1}{n-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}(\ln(x) - \ln(n-x))$ a odhad přejde do tvaru

$$\frac{2}{n} \ln(n-1) \leq f(n) \leq \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \ln(n-1).$$

Z toho je vidět, že jako g lze vzít například $g(n) = \frac{2\ln(n)}{n}$.