

## 4. soutěžní série

3. 4. 2019

**Úloha 1.** Dokažte, že součet druhých mocnin délek stran konvexního mnohoúhelníka obsaženého v jednotkovém čtverci je nejvýše 4.

(5 bodů)

**Úloha 2.** Každé políčko tabulky  $2019 \times 2019$  je obarveno černě nebo bíle tak, že v každé její čtvercové podtabulce  $m \times m$  pro  $m > 1$  je bílých políček alespoň tolik jako černých. Kolik nejvýše černých políček může obsahovat celá tabulka?

(10 bodů)

**Úloha 3.** Buď  $a > 0$  a  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost splňující  $x_1 = a$  a

$$x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k$$

pro všechna přirozená  $n$ . Ukažte, že existuje  $k$ , pro něž  $x_k > 2019!$ .

(10 bodů)

**Úloha 4.** Nechť funkce  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  a  $f(2x) - f(x) = o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ . Plyne odtud, že  $f(x) = o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ ?

(10 bodů)