3. soutěžní série – řešení

1. Po vytknutí $(n!)^2$ je levá strana rovna $(n!)^2(1+(n+1)^2+(n+1)^2(n+2)^2)$. Evidentně, číslo $k = 1 + (n+1)^2 + (n+1)^2(n+2)^2$ je ostře větší než $(n+1)^2(n+2)^2$ a snadno se ukáže, že je ostře menší než $[(n+1)(n+2)+1]^2$, tedy k nemůže být čtvercem přirozeného čísla. Rovnice tedy nemá řešení v přirozených číslech.

2. Protože $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$ pro $k = 2, 3, \ldots, n$ máme $1 + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n^n} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{n}$. Tedy

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}+\cdots\frac{1}{n^n}}} \geq \frac{1}{n^{1+\frac{2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Protože $\sqrt[n]{n} \to 1$, řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

diverguje dle limitního srovnávacího kritéria a dle srovnávacího kritéria pak diverguje i zadaná řada.

3. Dosazením $z = 1 - y$ dostáváme

$$f(1-y) + (1-y)f(y) = 2 - y,$$

tedy

$$yf(1-y) + y(1-y)f(y) = y(2-y)$$

a levou stranu vyjádříme z rovnice:

$$1 + y - f(y) + y(1-y)f(y) = y(2-y).$$

Úpravou dostáváme

$$f(y)(y^2 - y + 1) = y^2 - y + 1,$$

tedy pokud $y \neq \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (označme tyto dva kořeny jako y_1, y_2), máme $f(y) = 1$. Jelikož $y_1 + y_2 = 1$, a tedy čísla y_1 a y_2 se v rovnici objevují jen obě zároveň, můžeme položit $f(y_1) = w$ pro nějaké $w \in \mathbb{C}$, $f(y_2) = 1 + y_2 - y_2 w$ čímž splníme dosazení $z = y_2$ a úpravy výše ukazují, že i druhé dosazení $z = y_1 = 1 - y_2$ je v pořádku. Pro každé $w \in \mathbb{C}$ máme tedy právě jedno řešení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované v y_1, y_2 jako výše a na zbytku definičního oboru konstantně rovno jedné.

4. Uvažme pytel s n písmeny S a n písmeny V. Jejich náhodným taháním (bez vracení) a umisťováním do posloupnosti dostaneme všechny uvažované cesty (S znamená krok nahoru, V vravo). Pravděpodobnost, že nalosujeme danou cestu, je rovna součinu zlomků typu „počet zbývajících písmen, které zrovna potřebujeme“ děleno „počet všech zbývajících písmen“. V tomto součinu se v čitateli v nějakém pořadí objeví čísla $N, \ldots, 1$ jednou za S a jednou za V, ve jmenovateli bude $(2n)!$. Pravděpodobnost nalosování je tedy pro každou cestu $\frac{1}{\binom{2n}{n}}$. Označme počet přechodů SV a VS nalosované cesty jako X (je to náhodná veličina). Můžeme ji zapsat jako $X = X_1 + \cdots + X_{2n-1}$, kde pro $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$ je X_i je rovno jedné, pokud i-tá mezera představuje změnu písmene a nula jinak. Zřejmě všechny X_i mají stejné rozdělení (žádná mezera není vzhledem k uvažovaným posloupnostem výjimečná) a $\mathbb{E}X_1 = P(X_1 = 1) = \frac{n}{2n-1}$. Tedy z linearity střední hodnoty

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_{2n-1} = (2n-1)\frac{n}{2n-1} = n.$$