

2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27. 3. 2019.

Úloha 1. Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost $f(x) + f(2x) = 0$.

Úloha 2. Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která má polynom $z^{n+1} - z^n - 1$ komplexní kořen z_0 splňující $|z_0| = 1$.

Úloha 3. Kolik existuje permutací f na množině $S = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$, pro něž existuje n splňující pro všechna $i \in S$ rovnost $f^n(i) = 14 - i$?

Úloha 4. Pro dané přirozené n nalezněte všechny komplexní hermiteovské (samosdružené) matice A řádu n splňující $A^5 + A^3 + A = 3I_n$, kde I_n je jednotková matice řádu n .

Úloha 5. Ukažte, že není možné umístit do roviny 10 uzavřených jednotkových čtverců, aby žádné dva neměly společný vnitřní bod, a přitom jeden z nich měl s každým ze zbylých čtverců nějaký společný bod.

★ **Úloha 6.** Čísla $1, 2, \dots, n$ obarvíme třemi barvami tak, že každou barvu má více než $\frac{n}{4}$ čísel. Ukažte, že rovnice $x = y + z$ má řešení, pro které mají x, y, z navzájem různé barvy.