

# 1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 6. 3. 2019.

**Úloha 1.** Která z čísel 101, 10101, 1010101, ... jsou prvočísla?

**Úloha 2.** Ukažte, že pro libovolnou reálnou čtvercovou matici  $A$  platí

$$\det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix} = 0.$$

**Úloha 3.** Nechť  $a < b \in \mathbb{R}$  a  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  splňuje  $f(f(x)) = x$ , ale  $f(x) \neq x$  pro všechna  $x \in [a, b]$ . Ukažte, že  $f$  má nekonečně mnoho bodů nespojitosti.

**Úloha 4.** Najděte nejmenší možný stupeň polynomu  $P$  s celočíselnými koeficienty a vedoucím koeficientem 1, aby  $P(m)$  bylo násobkem miliónu pro všechna přirozená  $m$ .

**Úloha 5.** Každý bod v rovině s celočíselnými souřadnicemi je obarven buď červeně nebo modře tak, aby byly splněny podmínky:

- Na úsečce spojující červené body neleží žádný modrý bod.
- Pokud mají dva modré body vzdálenost 2, pak bod uprostřed mezi nimi je modrý.

Ukažte, že trojúhelník s červenými vrcholy neobsahuje modré body.

- ★ **Úloha 6.** Zajíc, vlk a dvě vlčata se pohybují po hranách pravidelného dvanáctistěnu. Zajíc a vlk se mohou pohybovat rychlostí 1, vlčata rychlostí  $\frac{1}{2019}$ . Vlci zajíce uloví, pokud se některý z nich nachází na stejném místě jako zajíc. Ukažte, že vlci mohou zajíce vždy ulovit.